Wyznaczanie asymptoty wielomianowej funkcji

Dariusz Szarejko

26 XI 2010

Jeżeli funkcja $f(x)$ posiada asymptotę wielomiannową w $\pm\infty$ to musi zachodzić:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0) \tag{1}$$

By wyznaczyć asymptotę musimy znaleźść współczynniki a_i. Wiedząc, że dla funkcji $g_{(x)} = ax^n$ jej pochodna z-tego stopnia jest postaci:

$$g^{(z)}(x) = a\frac{n!}{(n-z)!}x^{n-z}, \text{ dla z } \epsilon\{1,2,3,...,n\} \tag{2}$$

można zauważyć, że:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f^{(n)}(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0)' = \lim_{x\to\pm\infty} a_n \frac{n!}{(n-n)!}x^{n-n} = n! a_n \tag{3}$$

$$\Rightarrow a_n = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x) \tag{4}$$

Równanie (4) jest równocześnie wyznacznikiem, który mówi o tym jakiego stopnia wielomian jest asymptotą funkcj $f(x)$ (jeśli jakiekolwiek posiada). Stopień tego wielomianu jest równy najwyższemu możliwemu stopniowi nie zerowej pochodnej funkcji $f(x)$ w $\pm\infty$. Znając a_n możemy wyznaczyć kolejne współczyniki wielomianu:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f^{(n-1)}(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (a_n n! x + a_{n-1}(n-1)!) \tag{5}$$

$$a_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{x\to\pm\infty} (f^{(n-1)}(x) - a_n n! x) \tag{6}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f^{(n-2)}(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (a_n \frac{n!}{(n-n+2)!} x^{n-n+2} + a_{n-1}\frac{(n-1)!}{(n-n+2)!}x^{n-n+2} + a_{n-2}\frac{(n-2)!}{(n-2-n+2)!}x^{n-2-n+2}) \tag{7}$$

$$a_{n-2} = \frac{1}{(n-2)!} \lim_{x\to\pm\infty} (f^{(n-2)}(x) - a_n \frac{n!}{2!}x^2 - a_{n-1}\frac{(n-1)!}{1!}x) \tag{8}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f^{(n-3)}(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (a_n \frac{n!}{3!}x^3 + a_{n-1}\frac{(n-1)!}{2!}x^3 + a_{n-2}\frac{(n-2)!}{1!}x^1 + a_{n-3}\frac{(n-3)!}{0!}x^0) \tag{9}$$

$$a_{n-3} = \frac{1}{(n-3)!} \lim_{x\to\pm\infty} (f^{(n-3)}(x) - a_n \frac{n!}{3!}x^3 - a_{n-1}\frac{(n-1)!}{2!}x^2 - a_{n-2}\frac{(n-2)!}{1!}x^1) \tag{10}$$

We wzorach (4), (6), (8), (10) można zauważyć prostą zaleznośc i wyprowadzić wzór rekurencyjny na (n-k)-ty współczynnik wielomianu ze wzoru (1):

$$a_{n-k} = \lim_{x\to\pm\infty} (f^{(n-k)} - (\sum_{i=0}^{k-1} a_{n-k} \frac{(n-i)!}{(n-i-n+k)!} x^{n-i-n+k})) \tag{11}$$

$$a_{n-k} = \lim_{x\to\pm\infty} (f^{(n-k)} - (\sum_{i=0}^{k-1} a_{n-k} \frac{(n-i)!}{(k-i)!} x^{k-i})) \tag{12}$$

Gdzie n jest maksymalnym nie zerowym współczynnikiem wielomianu (1) a $k\epsilon\{1, 2, 3, ..., n\}$.